

Date : / /

Subject:

تصنيف المعادلات التفاضلية
الجزئية من النوع الزاوي
خواص وصفاتهم

المعادلة التفاضلية الجزئية في متغيرين (x, y)
هي علامة بين $u(x, y)$ ومشتقاتها جزئية من المراتب الثانية
وسجلنا ذلك المشتقات الجزئية من المراتب الثانية نفسها
وتكتب بالشكل $f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

المعادلة التفاضلية الجزئية من المراتب الثانية نوعي خطية
إذا كانت خطية بلية للمشتقات من المراتب العليا وبليية
لـ u ومشتقاتها الأولى أيضا وتكتب بالشكل الآتي:

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u + f = 0$$

علما أن A, B, C, D, E, F, f توابع لـ x, y فقط

$$\text{علما أن } |A| + |B| + |C| \neq 0$$

★ لحل المعادلة المصفاة تتبع الخطوات الآتية:

$$\boxed{1} \quad \text{نجد } B^2 - AC \quad \text{فإذا كان}$$

أ - $B^2 - AC > 0$ المعادلة من النوع الزاوي

ب - $B^2 - AC = 0$ المعادلة من النوع المماسي

ج - $B^2 - AC < 0$ المعادلة من النوع الناقص

(2)

Date : / /

Subject:

5. إيجاد المعادلة المميزة من المستوى !
 $A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

لحل هذه المعادلات
 $\therefore \phi(x, y) = C_1$
 $\therefore \phi(x, y) = C_2$

3. في حالة $B^2 - AC > 0$

أي المعادلة من النمط التفاضلي تحوي التفاضل الثاني !

$$\mathcal{P} = \phi(x, y) \quad \mathcal{Q} = \psi(x, y)$$

لذلك نجد المشتقات الجزئية لدالة u من المعادلات السابقة

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (u)$$

$$u_x = u_{xx} + u_{xy} = \psi_{xx}$$

$$u_y = u_{xy} + u_{yy} = \psi_{xy}$$

$$u_{xy} = u_{xy} + (u_{xx} + u_{yy}) + u_{yy} = \psi_{xy} + \psi_{xx} + \psi_{yy}$$

$$+ u_{xy} \psi_{xy} + u_{yy} \psi_{xy} \quad \star$$

للكحول في u_{xx} تبدل في $*$ حل $(y) \rightarrow x$

$$u_{xx} = u_{yy} \cdot y_x^2 + 2u_{xy} \cdot y_x y_{xx} + u_{yy} \cdot y_{xx}^2 + u_{xy} \cdot y_{xxx} + u_{yy} \cdot y_{xxx}$$

وللكحول في u_{yy} تبدل في $*$ حل $x \rightarrow y$

4. تبدل في هذه المشتقات في الدالة المعطاة لجد جميع الحدود المتكعبة تحصل في الشكل التوزيقي الآتي :

$$u_{xy} = \phi(x, y, u, u_x, u_y)$$

حل هذه المعادلة والعودة إلى المتحولان القديمين x و y يحصل في النهاية

5. في حالة $B^2 - AC = 0$ أي المعادلة هي القطع المكافئ

$$\xi = \xi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y)$$

أي نابع x, y

نأخذ $\eta = x$ أو $\eta = y$ في كل الحالتين

وبين فرض $\eta = \eta(x, y)$ أي نابع ξ نابع η (أي $\xi = x$)

لجد المشتقات الجزئية ولبعد الاختصار نحصل في الشكل التوزيقي بالمثل

$$u_{\xi\xi} = \phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

$$\text{أو } u_{\eta\eta} = \phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

6. المعادلة $B^2 - AC < 0$ المعادلة هي القطع الزائعي

في هذه الحالة حل المعادلة الجزئية هو $u(x, y) = f(\xi) + g(\eta)$

$$\xi = \xi(x, y) \text{ و } \eta = \eta(x, y)$$

(4)

Date : / /

Subject:

لجد المشتقات الجزئية u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} من دالة مسافة

و نذكر في المعادلة المعطاة نتحصل على الشكل التوزجي

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (x, y, u, u_x, u_y)$$

مثال ص ٢

أوجد الشكل التوزجي للمعادلة

$$x u_{xx} + (x+y) u_{xy} + y u_{yy} = 0$$

بأوجد الحل العام

الحل

$$A = x$$

$$2B = x+y$$

$$C = y$$

$$B^2 - AC = \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - xy = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 4xy}{4}$$

$$= \left(\frac{y-x}{2} \right)^2 > 0 \quad \text{المعادلة من النوع الزائدي}$$

المعادلة المعبرة لها هي $A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$

$$x dy^2 - (x+y) dx dy + y dx^2 = 0$$

طريقة ١ $(dy - dx)(x dy - y dx) = 0$

أو $(dy - dx) = 0 \xrightarrow{\text{بالتكامل}} y - x = C_1 \iff$

أو $x dy - y dx = 0 \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$

بالتكامل $\ln y - \ln x = \ln C_2$

$\ln \frac{y}{x} = \ln C_2 \Rightarrow \frac{y}{x} = C_2$

Date : / /

Subject:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{A}$$

طريقة 2

$$+ : \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial y}{y} - \frac{\partial x}{x} = 0$$

$$\ln y - \ln x = \ln c_2 \Rightarrow \ln \frac{y}{x} = \ln c_2 \Rightarrow \frac{y}{x} = c_2$$

$$- : \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}}{x} = \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow$$

$$y = x \Rightarrow \partial y - \partial x = 0 \Rightarrow y - x = c_1$$

نحري الحويل الأتي
نحسب المشتقات الجزئية

$$f_x = -1 \text{ و } f_y = 1 \text{ و } f_{xy} = 0 \text{ و } f_{xx} = 0 \text{ و } f_{yy} = 0$$

$$g_x = \frac{-y}{x^2} \text{ و } g_y = \frac{1}{x} \text{ و } g_{xy} = \frac{1}{x^2} \text{ و } g_{xx} = \frac{-2y}{x^3} \text{ و } g_{yy} = 0$$

$$- u_{xy} = u_{ff} f_x f_y + (f_x g_y + f_y g_x) u_{fg} + u_{gg} g_x g_y + u_{fg} f_{xy} + u_{gy} g_{xy}$$

$$- u_{xy} = -u_{ff} + (-\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}) u_{fg} - \frac{y}{x^3} u_{gg} - \frac{1}{x^2} u_{gy}$$

$$u_{xy} = -u_{ff} - (\frac{y+x}{x^2}) u_{fg} - \frac{y}{x^3} u_{gg} - \frac{1}{x^2} u_{gy}$$

$$- u_{xx} = u_{ff} f_x^2 + 2u_{fg} f_x g_x + u_{gg} g_x^2 + u_{ff} f_{xx} + u_{gy} g_{xx}$$

$$= u_{ff} + \frac{2y}{x^2} u_{fg} + \frac{y^2}{x^4} u_{gg} + \frac{2y}{x^3} u_{gy}$$

6

Date : / /

Subject:

$$u_{yy} = u_{xx} \quad y + 2u_{xy} \quad y \quad y + u_{yy} \quad y + u_{xx} \quad y + u_{yy} \quad y$$

$$= u_{xx} + \frac{2y}{x} u_{xy} + \frac{1}{x^2} u_{yy}$$

نموذج

$$x u_{xx} + \frac{2y}{x} u_{xy} + \frac{y^2}{x^2} u_{yy} + \frac{2y}{x^2} u_{xy} + (x+y) \left[-u_{xx} - \frac{(x+y)}{x^2} u_{xy} - \frac{y}{x^2} u_{yy} - \frac{1}{x^2} u_{xy} \right]$$

$$+ y u_{xx} + \frac{2y}{x} u_{xy} + \frac{y}{x^2} u_{yy} = 0$$

u_{xx} امتداد : $x - (x+y) + y = 0$

u_{xy} امتداد : $\frac{y^2}{x^2} + (x+y) \left(-\frac{y}{x^2} \right) + \frac{y}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x^2}$

$$= -\frac{y^2}{x^3} + \frac{y}{x^2} = 0$$

u_{yy} امتداد : $\frac{2y}{x} - \frac{(y+x)^2}{x^2} + \frac{2y}{x} = \frac{2y}{x} - \frac{(y^2 + x^2 + 2xy)}{x^2}$

$$= \frac{4xy - y^2 - x^2 - 2xy}{x^2} = -\frac{y^2 + x^2 - 2xy}{x^2} = -\frac{(y-x)^2}{x^2}$$

u_{yy} امتداد : $\frac{2y}{x^2} - (x+y) \frac{1}{x^2} = \frac{2y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}$

$$= \left(\frac{y-x}{x^2} \right) - \frac{(y-x)^2}{x^2} u_{xy} + \frac{y-x}{x^2} u_{yy} = 0$$

$$(y-x) u_{xy} - u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xy} - \frac{1}{y-x} u_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow u_{xy} - \frac{1}{x} u_{yy} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[u_{xy} - \frac{1}{x} u_{yy} \right] = 0$$

نتیجه : در تمام موارد که در بالا آمده است و در اینجا نیز به همین نتیجه می‌رسیم.

7

Date : / /

Subject:

(هه و المعند المسطر هو ؟) :

$$y' + p(x)y = q(x)$$

بفرض صفر من المعادلة معادل الناحية هذه.

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

$$[\mu(x) y]' = q(x) \mu(x)$$

$$\mu(x) y = \int q(x) \mu(x) dx$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{-\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\left[\frac{1}{x} u \right]' = q(x) \cdot \frac{1}{x}$$

بالمعادلة :

$$\frac{1}{x} u = \int \underbrace{q(x) \frac{1}{x}}_{q(x)} dx + q(y)$$

$$u = x [q(x) + q(y)]$$

$$u(x, y) = x - x [q(x - x) + q(\frac{y}{x})] \quad \text{بند ؟ ، } y$$

$$u_{xx} = 0$$

بلا ملاحظة

$$\frac{\partial}{\partial x} [u_x] = 0$$

ثبت ؟ و تكامله لـ ؟

$$u(x, y) = \int q(y) dx + q(y) = q(y)x + q(y)$$